

Sur le corps des modules de certaines variétés

Jean-Marc Couveignes et Emmanuel Hallouin*

30 juillet 2008

Résumé

Nous associons à tout revêtement de courbes des variétés ayant même corps des modules et mêmes corps de définition que ce revêtement. Nous en déduisons des exemples de courbes qui ont \mathbb{Q} pour corps des modules, admettent des modèles sur tous les complétés de \mathbb{Q} mais pas de modèle sur \mathbb{Q} .

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Quelques catégories munies d'une action de Galois	2
1.2	Descente de Weil	3
1.3	Stratégie	4
2	Annulation du groupe d'automorphismes de la base	5
3	Surfaces quasi-projectives	8
3.1	La construction de la surface	8
3.2	Corps des modules et corps de définition	8
4	Surfaces normales projectives	9
4.1	La construction de la surface \mathcal{S} et ses premières propriétés	10
4.2	Étude du groupe d'automorphismes de \mathcal{S}	11
4.3	Corps des modules et corps de définition de \mathcal{S}	13
5	Courbes	13
5.1	Deux courbes stables	14
5.2	Déformations	18
5.3	Corps de modules, corps de définition dans les fibres de \mathcal{K}	19

*Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse et CNRS, Université de Toulouse 2 le Mirail, 5 allées Antonio Machado 31058 Toulouse cedex 9

6	Quelques résultats intermédiaires d'ordre général	20
6.1	Sur les courbes et les produits de deux courbes	20
6.2	Déformation d'automorphismes	22
6.3	Sur les automorphismes d'une famille de courbes	23

1 Introduction

Le propos de cet article est de construire des obstructions à la descente dans la catégorie des variétés, c'est-à-dire d'exhiber, par exemple, des variétés de corps des modules \mathbb{Q} n'ayant pas de modèle sur \mathbb{Q} .

Partant d'une obstruction à la descente (éventuellement globale comme dans [CR04]) dans la catégorie des revêtements de courbes, on souhaite produire des obstructions à la descente dans d'autres catégories. La catégorie ultime sera celle des courbes lisses. On procédera par étapes : passant par la catégorie des surfaces quasi-projectives, puis projectives.

Peu d'exemples d'obstructions sont connus pour les variétés. Mestre a donné des exemples d'obstructions locales pour des courbes hyperelliptiques dans [Mes91].

On montre ici le

Théorème 1.1 *Il existe une $\overline{\mathbb{Q}}$ -courbe lisse projective, de corps de module \mathbb{Q} et définie sur tous les complétés de \mathbb{Q} mais pas sur \mathbb{Q} lui même.*

1.1 Quelques catégories munies d'une action de Galois

Soit K un corps de caractéristique nulle. On note K^s sa clôture séparable et Γ_K son groupe de Galois absolu. Une K -variété est par défaut supposée réduite, lisse et géométriquement irréductible. Nous serons amenés à considérer différentes catégories munies d'une action fonctorielle de Γ_K . Il s'agit premièrement de la catégorie des variétés algébriques, réduites, lisses, et irréductibles sur K^s . On considère aussi les sous catégories pleines formées des courbes lisses projectives sur K^s , des surfaces quasi-projectives lisses sur K^s , des surfaces projectives normales sur K^s . Soit \mathcal{B} une K -variété lisse réduite et géométriquement irréductible. On s'intéressera à la catégorie des K^s -revêtements de \mathcal{B} et à la sous-catégorie pleine formée des revêtements étales.

Si $\mathcal{O} \rightarrow \text{Spec}(K^s)$ est un objet d'une des catégories ci-dessus et si $\sigma \in \Gamma_K$, l'objet ${}^\sigma\mathcal{O} \rightarrow \text{Spec}(K^s)$ est défini par composition $\mathcal{O} \rightarrow \text{Spec}(K^s) \xrightarrow{\text{Spec}(\sigma^{-1})} \text{Spec}(K^s)$. Cela définit un foncteur covariant, encore noté σ . Le stabilisateur dans Γ_K de la classe de K^s -isomorphisme d'un objet est un sous-groupe d'indice fini. Le sous-corps de K^s fixé par ce sous-groupe est appelé corps des modules de l'objet. Si L est un corps tel que $K \subset L \subset K^s$, on dit que \mathcal{O} est défini sur L s'il est K^s -isomorphe au tiré en arrière d'un L -objet $\mathcal{O}' \rightarrow \text{Spec}(L)$ par $\text{Spec}(K^s) \rightarrow \text{Spec}(L)$. On dit aussi que L est un corps de définition de \mathcal{O} . Le corps des modules est contenu dans tous les corps de définition.

1.2 Descente de Weil

Soit K un corps de caractéristique nulle et K^s une clôture algébrique. Soit $L \subset K^s$ une extension finie de K . Soit Θ l'ensemble des K -plongements de L dans K^s . C'est un ensemble fini de cardinal le degré de L sur K . Il est muni d'une action à gauche du groupe de Galois absolu Γ_K de K . Pour $\omega \in \Gamma_K$ et $\sigma \in \Theta$ cette action est notée sans façons $\omega\sigma \in \Theta$. À l'inclusion $L \subset K^s$ correspond un élément particulier de Θ que l'on note Id . On a une surjection $\Gamma_K \rightarrow \Theta$ définie par $\omega \rightarrow \omega\text{Id}$ et on notera abusivement $\omega\text{Id} = \omega \in \Theta$.

Soit $\mathcal{Q} \rightarrow \text{Spec}(K^s)$ un objet de l'une des catégories précédentes. On suppose que K est le corps des modules de \mathcal{Q} . On suppose que \mathcal{Q} est défini sur L . Il existe donc un objet $\mathcal{O} \rightarrow \text{Spec}(L)$ tel que \mathcal{Q} soit K^s -isomorphe à $\text{Id}^*\mathcal{O}$.

On appelle $\langle \mathcal{O}, L/K \rangle$ la sous-catégorie pleine dont les objets sont les conjugués ${}^\sigma\mathcal{O}$ de \mathcal{O} avec σ parcourant Θ . Ici, l'objet ${}^\sigma\mathcal{O}$ est le tiré en arrière de $\mathcal{O} \rightarrow \text{Spec}(L)$ le long de $\text{Spec}(\sigma) : \text{Spec}(K^s) \rightarrow \text{Spec}(L)$.

Notons que $\langle \mathcal{O}, L/K \rangle$ est un groupoïde fini dont le nombre d'objets est le degré de L sur K . Ce groupoïde est connexe puisque K est le corps des modules de \mathcal{O} . Ce groupoïde est muni d'une action fonctorielle du groupe de Galois absolu de K . Si \mathcal{O}/L est défini sur L et si $M \subset K^s$ est une extension finie de L de degré d , alors $\langle \mathcal{O} \otimes_L M, M/K \rangle$ est formé de d copies de $\langle \mathcal{O}, L/K \rangle$ connectées avec les identifications triviales.

Weil montre que le groupoïde galoisien abstrait $\langle \mathcal{O}, L/K \rangle$ contient toutes les informations utiles à la descente de L à K .

Théorème 1.2 (A. Weil) *L'objet \mathcal{O} est L -isomorphe à un K -objet de sa catégorie si et seulement s'il existe une famille $(I_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau) \in \Theta}$ de morphismes dans la catégorie $\langle \mathcal{O}, L/K \rangle$ satisfaisant les conditions suivantes.*

- Cette famille est indexée par les couples de plongements $(\sigma, \tau) \in \Theta$ et $I_{\sigma,\tau} : {}^\tau\mathcal{O} \rightarrow {}^\sigma\mathcal{O}$.
- $I_{\sigma,\tau} I_{\tau,\mu} = I_{\sigma,\mu}$ pour tous $\sigma, \tau, \mu \in \Theta$.
- Pour tout $\omega \in \Gamma_K$ on a ${}^\omega I_{\sigma,\tau} = I_{\omega\sigma, \omega\tau}$.

La famille de morphismes $(I_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau) \in \Theta}$ est appelée *donnée de descente* de L à K pour \mathcal{O} .

En somme, Weil montre que, pour les catégories concernées, les seules obstructions à la descente sont combinatoires et qu'elles sont exprimées en termes du groupoïde galoisien abstrait $\langle \mathcal{O}, L/K \rangle$. En particulier, soient deux L -objets \mathcal{O} et \mathcal{P} de corps des modules K . Soient $\langle \mathcal{O}, L/K \rangle$ et $\langle \mathcal{P}, L/K \rangle$ les groupoïdes pour la descente à K . S'il existe un isomorphisme de groupoïdes Γ_K -équivant entre $\langle \mathcal{O}, L/K \rangle$ et $\langle \mathcal{P}, L/K \rangle$, alors K est corps de définition de \mathcal{O} si et seulement s'il est corps de définition de \mathcal{P} . Noter que \mathcal{O} et \mathcal{P} ne sont pas, ici, nécessairement objets de la même catégorie : seuls importent les deux groupoïdes galoisiens associés.

Mais on a mieux : la seule existence d'un morphisme entre ces deux groupoïdes fournit une information.

Théorème 1.3 *Soit K un corps de caractéristique nulle. Soit \mathcal{O} un objet de l'une des catégories ci-dessus. Soit \mathcal{P} un objet de l'une des catégories ci-dessus (pas nécessairement celle de \mathcal{O}).*

Soit $L \subset K^s$ une extension finie de K . On suppose que \mathcal{O} et \mathcal{P} sont définis sur L et que K est le corps des modules de \mathcal{O} et \mathcal{P} . Soient $\langle \mathcal{O}, L/K \rangle$ et $\langle \mathcal{P}, L/K \rangle$ les groupoïdes associés à \mathcal{O} et \mathcal{P} pour la descente de L à K .

Supposons qu'il existe un morphisme (foncteur covariant) de groupoïde Γ_K -équivariant de $\langle \mathcal{O}, L/K \rangle$ vers $\langle \mathcal{P}, L/K \rangle$ qui envoie l'objet \mathcal{O} sur l'objet \mathcal{P} .

Alors si K est corps de définition de \mathcal{O} , il est aussi corps de définition de \mathcal{P} .

C'est évident : il suffit d'appliquer le foncteur en question à une donnée de descente $(I_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau) \in \Theta}$ de L à K pour \mathcal{O} . On obtient une donnée de descente de L à K pour \mathcal{P} car le foncteur est un morphisme Γ_K -équivariant de groupoïdes.

Remarque 1 *Le groupoïde muni d'une action de Galois qui apparaît dans les théorèmes précédents est très proche de la gerbe des modèles introduite par Giraud dans [Gir71] et utilisée par Dèbes et Douai dans [DD99] dans le cas des revêtements. La formulation de Weil fait apparaître seulement la famille finie des conjugués d'un modèle donné (soit des sections locales de la gerbe sur un recouvrement fini de $\text{Spec}(K)$). Les conditions de Weil sont équivalentes à l'existence d'un groupoïde galoisien \mathcal{G} dont les objets sont les objets de $\langle \mathcal{O}, L/K \rangle$ plus un objet O , et qui satisfait les propriétés suivantes :*

- *Il existe un morphisme I dans \mathcal{G} entre O et \mathcal{O} .*
- *Le groupoïde $\langle \mathcal{O}, L/K \rangle$ est une sous-catégorie pleine de \mathcal{G} .*
- *L'action du groupe de Galois absolu de K sur $\langle \mathcal{O}, L/K \rangle$ s'étend en une action fonctorielle sur \mathcal{G} qui fixe O .*
- *Le morphisme I est fixé par le groupe de Galois absolu de L vu comme sous-groupe du groupe de Galois absolu de K .*

1.3 Stratégie

Les obstructions à la descente construites dans ce travail dérivent de celles construites par Ros et Couveignes dans la catégorie des revêtements de courbes :

Théorème 1.4 (cf.[CR04], Corollaire 2) *Il existe un $\overline{\mathbb{Q}}$ -revêtement ramifié de $\mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^1$ dont le corps des modules est \mathbb{Q} , qui admet des modèles sur tous les complétés de \mathbb{Q} mais pas de modèle sur \mathbb{Q} .*

Afin d'en déduire des exemples d'obstructions à la descente dans d'autres catégories, nous présentons plusieurs procédés permettant de passer de la catégorie des revêtements de courbes aux autres catégories présentées dans la section 1.1, tout en conservant les propriétés de modules et de définition. Pour ce faire, nous utiliserons plusieurs fois le théorème 1.3 pour passer d'une catégorie à une autre.

Dans la section 2, on part d'un K^s -revêtement $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$ d'une K -courbe \mathcal{B} et on construit une K -courbe \mathcal{B}' sans K^s -automorphisme non-trivial et un K^s -revêtement $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{B}' \otimes_K K^s$ ayant même corps des modules et mêmes corps de définition que φ .

Dans la section 3 on part d'un K^s -revêtement $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$ d'une K -courbe \mathcal{B} et on construit une K^s -surface quasi-projective ayant même corps des modules et mêmes corps de définition que ce revêtement. Lorsque la base \mathcal{B} de φ n'a pas de K^s -automorphisme non-trivial, la surface en question est l'ouvert complémentaire du graphe du revêtement. Le résultat de la section 2 permet de se ramener à ce cas.

Dans la section 4 nous partons d'un K^s -revêtement d'une K -courbe algébrique sans K^s -automorphisme. Nous supposons que le corps des modules de ce revêtement est K et nous lui associons une K^s -surface projective normale, de corps des modules K , ayant les mêmes corps de définition que ce revêtement. Cette surface projective est construite comme revêtement fortement ramifié le long du graphe du revêtement.

Enfin, dans la section 5 nous construisons une K^s -courbe projective, de corps des modules K , ayant les mêmes corps de définition que le revêtement initial. C'est une courbe tracée sur la surface précédente, et obtenue par déformation d'une courbe stable choisie pour que son groupe d'automorphismes soit le même que celui de ladite surface.

Tout au long de ce travail, notre principale préoccupation sera de contrôler le groupe des automorphismes de chacun des objets que nous construirons.

2 Annulation du groupe d'automorphismes de la base

Dans cette section, on part d'un corps K de caractéristique nulle, d'une extension algébrique $L \subset K^s$ de K , d'une K -courbe \mathcal{B} projective, lisse, géométriquement irréductible, et d'un L -revêtement $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K L$ ayant K pour corps des modules. On veut produire d'autres revêtements, ayant même corps des modules et mêmes corps de définition, et jouissant de propriétés supplémentaires. En particulier, on souhaite montrer que l'on peut supposer que la base ne possède pas de K^s -automorphisme non trivial.

On commence par montrer que le degré du revêtement peut être multiplié par n'importe quel premier étranger au degré de départ.

Lemme 2.1 *Soit \mathcal{B} une K -courbe projective lisse géométriquement irréductible et $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K L$ un L -revêtement de degré d . Pour tout premier p étranger à d , il existe $\varphi' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K L$ un L -revêtement de degré pd ayant même corps des modules et mêmes corps de définition que φ .*

Preuve — Soit $f \in K(\mathcal{B})$ une fonction non constante, dont le diviseur est simple et disjoint du lieu de ramification de φ . L'équation $Y^p = f$ définit une extension de degré p de $K(\mathcal{B})$ dont on note \mathcal{B}' le modèle projectif lisse. C'est une K -courbe, projective, lisse, géométriquement irréductible qui revêt \mathcal{B} par un revêtement ν de degré p (et galoisien sur K^s). Les extensions $L(\mathcal{C})$ et $L(\mathcal{B}')$ sont linéairement disjointes sur $L(\mathcal{B})$. Soit \mathcal{C}' le modèle projectif lisse associé au compositum de $L(\mathcal{C})$ et $L(\mathcal{B}')$. C'est, par construction, une L -courbe qui revêt $\mathcal{B} \otimes_K L$ par un revêtement ψ de degré pd :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{C}' & & \\
 & \swarrow & \downarrow \psi & \searrow & \\
 \mathcal{B}' \otimes_K L & & \mathcal{B} \otimes_K L & & \mathcal{C} \\
 & \searrow \nu & \uparrow \varphi & \swarrow & \\
 & & \mathcal{B} \otimes_K L & &
 \end{array}$$

De nouveau par construction, il est facile de voir que tout corps de définition de φ est aussi un corps de définition pour ψ , et que le corps des modules de ψ est inclus dans celui de φ .

Réciproquement, pour tout $\sigma \in \Gamma_K$, le sous-revêtement ${}^\sigma\varphi : {}^\sigma\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K L$ du revêtement ${}^\sigma\psi : {}^\sigma\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K L$ peut être caractérisé comme le sous-revêtement maximal non ramifié en le support de f . Il en résulte que pour tous $\sigma, \tau \in \Gamma_K$ et tout K^s -isomorphisme I entre ${}^\tau\psi$ et ${}^\sigma\psi$, il existe un unique K^s -isomorphisme $J : {}^\tau\mathcal{C} \rightarrow {}^\sigma\mathcal{C}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}^\tau\mathcal{C}' & \xrightarrow{I} & {}^\sigma\mathcal{C}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^\tau\mathcal{C} & \xrightarrow{J} & {}^\sigma\mathcal{C} \end{array}$$

commute. De plus J est un K^s -isomorphisme entre ${}^\tau\varphi$ et ${}^\sigma\varphi$. Cela permet de montrer, d'une part, que le corps des modules de φ est contenu dans celui de ψ . Compte tenu de ce qui précède ces deux corps de modules sont égaux. D'autre part, soit $L' \subset K^s$, une extension algébrique de M . À toute donnée de descente à L' pour ψ , il correspond, par projection, une donnée de descente à L' pour φ . Ainsi les revêtements φ et ψ ont bien mêmes corps de définition comme annoncé. \square

Ensuite, on montre que l'on peut choisir une courbe de base de genre ≥ 2 .

Lemme 2.2 *Soit \mathcal{B} une K -courbe projective lisse géométriquement irréductible et $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K L$ un L -revêtement de degré d . Alors il existe une K -courbe \mathcal{B}' lisse, projective, géométriquement irréductible, de genre au moins 2 et un L -revêtement $\varphi' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{B}' \otimes_K L$ ayant même corps de modules et mêmes corps de définition que celui de φ .*

Preuve — On reprend la construction de la preuve précédente en supposant de plus que le degré de f est au moins 3 et on s'intéresse au revêtement $\varphi' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{B}' \otimes_K L$. L'hypothèse sur le degré de f permet, grâce à la formule de Hurwitz, de montrer que la courbe \mathcal{B}' a un genre au moins égal à 2. Avec des arguments proches de ceux de la preuve précédente, on vérifie que φ et φ' ont bien même corps des modules et mêmes corps de définition. \square

Enfin, on prouve que la base peut ne pas avoir de K^s -automorphisme non trivial.

Lemme 2.3 *Soit \mathcal{B} une K -courbe projective lisse géométriquement irréductible et $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K L$ un L -revêtement de degré d . Alors il existe une K -courbe \mathcal{B}' lisse, projective, géométriquement irréductible, de genre au moins 2 et telle que $\mathcal{B}' \otimes_K K^s$ n'ait pas d'automorphisme non trivial et il existe un L -revêtement $\varphi' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{B}' \otimes_K L$ ayant même corps de modules et mêmes corps de définition que φ .*

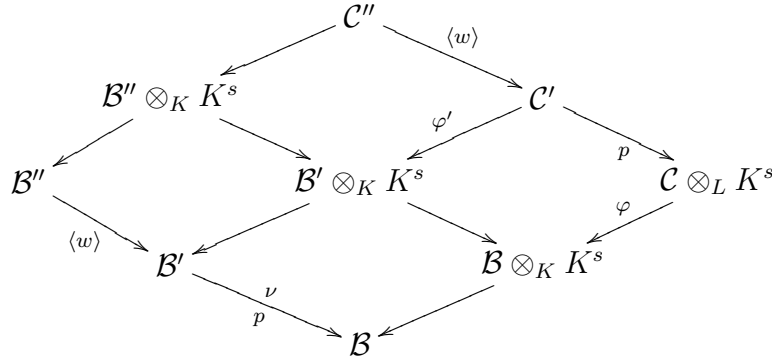
Preuve — D'après le lemme 2.2 on peut supposer que le genre de \mathcal{B} est au moins 2 et donc que le groupe des K^s -automorphismes de \mathcal{B} , noté A , est fini.

Soit $p \geq 3$ un entier premier. Commençons par montrer qu'il existe une fonction $f \in K(\mathcal{B})$, non-constante et non-singulière au-dessus de 2, -2 et ∞ , de degré au moins $2 + 4p(g(\mathcal{B}) - 1) + 2p^2$, telle que l'ensemble $f^{-1}(\{-2, 2\})$ ne soit invariant par aucun automorphisme non-trivial de $\mathcal{B} \otimes_K K^s$, et telle que l'ensemble des valeurs singulières de φ ne rencontre pas l'ensemble $f^{-1}(\{2, -2, \infty\})$.

En évitant les noyaux des formes linéaires $\alpha \pm \text{id}$ pour $\alpha \in A \setminus \{\text{id}\}$ (en nombre fini) du K^s -espace vectoriel $K^s(\mathcal{B})$, on vérifie qu'il existe $f \in K^s(\mathcal{B})$ non constante telle que $\alpha(f) \neq \pm f$

Par construction, la fonction f^2 n'a pas d'automorphisme non trivial (i.e. $\text{Aut}_{K(f^2)}(K(\mathcal{B})) = \{\text{id}\}$). D'après le lemme 6.3, on en déduit que presque toutes les fibres de f^2 sont non singulières et fixées par aucun automorphisme non trivial de A . En particulier, il existe $\lambda \in K^*$ telle que la fibre de f^2 en λ^2 est non singulière, fixée par aucun automorphisme non-trivial de A et disjointe des valeurs singulières de φ . La fonction $2f/\lambda$ satisfait toutes les contraintes souhaitées. On la note encore f .

Ramification disjointe oblige, les corps $K^s(\mathcal{B}'')$ et $K^s(\mathcal{C})$ sont linéairement disjoints sur $K^s(\mathcal{B})$. Les modèles projectifs lisses des compositum de $K^s(\mathcal{C})$ avec $K^s(\mathcal{B}')$ et $K^s(\mathcal{B}'')$, notés \mathcal{C}' et \mathcal{C}'' s'inscrivent dans le diagramme suivant :



Montrons que le revêtement $\varphi' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{B}' \otimes_K K^s$ satisfait les conditions du lemme. Déjà, il a clairement même corps des modules et mêmes corps de définition que φ .

7

en $f^{-1}(\{-2, 2\})$ on en déduit que $\mathfrak{b} = \text{Id}$ puis que \mathfrak{b}' est un K^s -automorphisme du revêtement ν . Comme ν n'a pas d'automorphisme, on a bien $\mathfrak{b}' = \text{id}$. \square

3 Surfaces quasi-projectives

Soit K un corps de caractéristique nulle. On donne, dans cette section, un procédé général qui associe à tout K^s -revêtement de courbes $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$, une K^s -surface quasi-projective lisse et irréductible en conservant les propriétés de modules et de définition.

Théorème 3.1 *Soit K un corps de caractéristique nulle, \mathcal{B} une K -courbe lisse projective et géométriquement irréductible et $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$ un K^s -revêtement. Il existe une K^s -surface quasi-projective lisse et irréductible, ayant même corps des modules et mêmes corps de définition que φ .*

3.1 La construction de la surface

Tout d'abord, grâce aux lemmes 2.2 et 2.3, on peut supposer que la base $\mathcal{B} \otimes_K K^s$ est de genre au moins 2 et qu'elle n'a pas de K^s -automorphismes non triviaux.

On considère $\mathcal{P} = (\mathcal{B} \otimes_K K^s) \times \mathcal{C}$ le produit cartésien des deux courbes et \mathcal{G} le graphe de φ dans \mathcal{P} . Soit \mathcal{U} l'ouvert de \mathcal{P} complémentaire de \mathcal{G} . On note $p_{\mathcal{C}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ et $p_{\mathcal{B}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$ les projections sur chacun des deux facteurs.

La surface attendue n'est rien d'autre que l'ouvert \mathcal{U} que l'on appelle *empreinte* du revêtement (\mathcal{C}, φ) . Il nous reste à étudier les corps des modules et de définition de cette empreinte en fonction de ceux de φ .

3.2 Corps des modules et corps de définition

On procède en enchaînant deux lemmes.

Lemme 3.2 *Soient \mathcal{U} et \mathcal{V} les empreintes respectives de deux K^s -revêtements connexes non triviaux $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$ et $\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$, où \mathcal{B} est une K -courbe lisse, projective, géométriquement irréductible, de genre au moins 2 et sans K^s -automorphisme non trivial. Alors tout K^s -morphisme surjectif de $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ est de la forme $\text{Id} \times \gamma$ où $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un K^s -morphisme entre les revêtements $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$ et $\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$.*

Preuve — Un K^s -morphisme de (\mathcal{C}, φ) dans (\mathcal{D}, ψ) est un K^s -morphisme de courbes $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $\psi\gamma = \varphi$. L'isomorphisme produit $\text{Id} \times \gamma$ de $(\mathcal{B} \otimes_K K^s) \times \mathcal{C}$ dans $(\mathcal{B} \otimes_K K^s) \times \mathcal{D}$ envoie le graphe de φ sur celui de ψ et \mathcal{U} sur \mathcal{V} .

Réciproquement, soit v un K^s -morphisme surjectif de \mathcal{U} sur \mathcal{V} . Soit c un K^s -point fermé de \mathcal{C} . La restriction de $p_{\mathcal{D}} \circ v$ à $((\mathcal{B} \otimes_K K^s) \times \{c\}) \cap \mathcal{U}$ est constante car le genre de \mathcal{B} est inférieur à celui de \mathcal{D} . On note $\gamma(c)$ cette constante et on définit ainsi un morphisme $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ qui n'est pas constant car v est surjectif. La restriction de $p_{\mathcal{B}} \circ v$ à $((\mathcal{B} \otimes_K K^s) \times \{c\}) \cap \mathcal{U}$ est un morphisme

β_c à valeurs dans \mathcal{B} . Soit $F \subset \mathcal{C}$ l'ensemble des K^s -points fermés de \mathcal{C} tels que β_c est constante. C'est un ensemble fini car v est surjectif. Pour un K^s -point fermé $c \notin F$ le morphisme β_c induit un automorphisme de \mathcal{B} , qui est trivial puisque \mathcal{B} n'a pas d'automorphisme non-trivial. On a donc $v(b, c) = (b, \gamma(c))$ pour les K^s -points fermés b de \mathcal{B} et c de \mathcal{C} avec $c \notin F$ et $(b, c) \in \mathcal{U}$. Soit b un K^s -point fermé de $\mathcal{B} \otimes_K K^s$. La restriction de $p_{\mathcal{B}} \circ v$ à $(\{b\} \times \mathcal{C}) \cap \mathcal{U}$ est constante égale à b sur l'ouvert non vide $(\{b\} \times (\mathcal{C} - F)) \cap \mathcal{U}$. Donc elle est constante. Ainsi F est vide et v est la restriction de $\text{Id} \times \gamma$ à \mathcal{U} . Donc $\text{Id} \times \gamma$ envoie \mathcal{U} sur \mathcal{V} donc $\psi\gamma = \varphi$. \square

Lemme 3.3 *Soit \mathcal{U} l'empreinte d'un K^s -revêtement $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$ de degré au moins 2, où \mathcal{B} est une K -courbe lisse, projective, géométriquement irréductible, de genre au moins 2 et sans K^s -automorphisme non trivial. Alors :*

1. *le groupe des K^s -automorphismes de \mathcal{U} est égal au groupe des K^s -automorphismes du revêtement $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$;*
2. *le corps des modules de \mathcal{U} (dans la catégorie des variétés quasi-projectives) est le corps des modules du revêtement $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$;*
3. *une extension algébrique de K est corps de définition de \mathcal{U} si et seulement si elle est corps de définition du revêtement $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$.*

Preuve — Les deux premiers points résultent du lemme 3.2. On prouve le troisième en appliquant le principe général exposé dans l'introduction. Soient $L \subset K^s$ une extension algébrique de K et $\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K L$ un L -modèle de φ . Il existe $J : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \otimes_L K^s$ un K^s -isomorphisme tel que $\varphi = \psi J$. Soit \mathcal{V} l'ouvert de $(\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}$ complémentaire du graphe de ψ . C'est une L -variété et $\text{Id} \times J$ est un K^s -isomorphisme de \mathcal{U} sur $\mathcal{V} \otimes_L K^s$.

Réciproquement, soit \mathcal{V} un L -modèle de \mathcal{U} et $v : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \otimes_L K^s$ un K^s -isomorphisme. Pour tout σ dans $\text{Gal}(K^s/L)$ la composée $w_\sigma = v^{-1}\sigma v$ est un K^s -isomorphisme de ${}^\sigma\mathcal{U}$ sur \mathcal{U} qui s'étend en un K^s -isomorphisme $\text{Id} \times V_\sigma$ de $(\mathcal{B} \otimes_K K^s) \times {}^\sigma\mathcal{C}$ dans $(\mathcal{B} \otimes_K K^s) \times \mathcal{C}$ avec V_σ un K^s -isomorphisme de revêtements de ${}^\sigma\varphi$ sur φ . Puisque les w_σ satisfont les conditions de Weil pour la descente à L , il en va de même des V_σ . Donc φ admet un L -modèle. \square

Le théorème 1.4 nous permet donc d'affirmer que :

Corollaire 3.4 *Il existe des $\overline{\mathbb{Q}}$ -surfaces quasi-projectives lisses et géométriquement irréductibles de corps des modules \mathbb{Q} , définies sur tous les complétés de \mathbb{Q} mais n'étant pas définies sur \mathbb{Q} .*

4 Surfaces normales projectives

Dans cette section K est encore un corps de caractéristique nulle. Dans le même esprit que la section précédente, on donne ici un procédé assez général qui associe à un revêtement de courbes de corps des modules K , une K^s -surface projective normale, irréductible ayant même corps des modules et mêmes corps de définition que le revêtement initial. Plus précisément on veut montrer le :

Théorème 4.1 *Soit \mathcal{B} une courbe définie sur K et soit $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$ un K^s -revêtement de corps des modules K . Il existe une K^s -surface projective, irréductible, et normale, de corps des modules K , et ayant mêmes corps de définition que φ .*

4.1 La construction de la surface \mathcal{S} et ses premières propriétés

Notre point de départ est encore un revêtement $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K L$ de degré $d \geq 2$, de corps des modules K et défini sur $L \subset K^s$ une extension algébrique de K . D'après le lemme 2.3, on peut supposer que \mathcal{B} est de genre au moins 2 et qu'elle n'a pas de $\overline{\mathbb{Q}}$ -automorphisme non trivial. On construit un revêtement de $(\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}$ fortement ramifié le long du graphe de φ .

On se donne un système fini $(h_j)_{1 \leq j \leq J}$ de générateurs du corps $K(\mathcal{B})$. On suppose qu'aucun h_j n'est une puissance dans $K^s(\mathcal{B})$.

On pose $I = 2J$ et $\Pi = \prod_{i=1}^I p_i$ le produit des I premiers nombres premiers plus grands que le degré d de φ .

On choisit deux entiers positifs a et b premiers entre eux et plus grands que $1 + 2(g(\mathcal{B}) - 1)\Pi + \Pi^2$ et pour tout $1 \leq j \leq J$ on pose :

$$f_j = h_j^a, \quad f_{j+J} = h_j^b.$$

Quitte à grandir les valeurs de a et b , on peut supposer qu'aucune des fonctions $f_i - \lambda$ n'est une puissance p_i -ème dans $K^s(\mathcal{B})$ pour $\lambda \in K^s$ et $1 \leq i \leq I$: c'est évident pour $\lambda = 0$. Si $\lambda \neq 0$ et si $h_i^a - \lambda = \prod_{0 \leq k \leq a-1} (h_i - \zeta_a^k \lambda^{\frac{1}{a}})$ est une puissance, alors h_i a au moins a valeurs singulières distinctes. Ceci est exclu si a est plus grand que le nombre de valeurs singulières de h_i .

D'autre part, les $(f_i)_{1 \leq i \leq I}$ engendrent $K(\mathcal{B})$ et elles ont un degré plus grand que $1 + 2(g(\mathcal{B}) - 1)\Pi + \Pi^2$. Soit M le maximum et m le minimum des degrés des f_i , alors :

$$\forall 1 \leq i \leq I, \quad 1 + 2(g(\mathcal{B}) - 1)\Pi + \Pi^2 < m \leq \deg(f_i) \leq M.$$

Soit p un nombre premier plus grand que $(g(\mathcal{B}) + IM)\Pi$ et notons \mathcal{D} la L -courbe et $\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K L$ le revêtement de degré pd , donnés par le lemme 2.1. Le genre de \mathcal{D} est au moins $dp > (g(\mathcal{B}) + IM)\Pi$ et les revêtements φ et ψ ont même corps des modules et mêmes corps de définition. On vérifie en outre qu'aucune des fonctions $f_i \circ \psi - \lambda$ n'est une puissance p_i -ème dans $K^s(\mathcal{D})$ pour $\lambda \in K^s$ et $1 \leq i \leq I$ (ceci est déjà vrai pour $f_i - \lambda$ et de plus le degré pd de ψ est premier à p_i .)

On définit la fonction g_i sur $(\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}$ par :

$$g_i(P, Q) = f_i(\psi(Q)) - f_i(P).$$

La partie négative $(g_i)_\infty$ du diviseur de g_i est :

$$(g_i)_\infty = (f_i)_\infty \times \mathcal{D} + \mathcal{B} \times (f_i \circ \psi)_\infty,$$

et les parties positives $(g_i)_0$ que l'on note Δ_i vérifient quant-à-elles :

$$\text{pgcd}_i(\Delta_i) = \mathcal{G},$$

où \mathcal{G} est le graphe de ψ .

On définit une extension abélienne du corps des fonctions $L((\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D})$ de $(\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}$ en posant

$$y_i^{p_i} = g_i$$

où p_i est i -ème nombre premier plus grand que le degré d de φ .

On note, enfin, \mathcal{S} la normalisation de $(\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}$ dans le corps ainsi défini. Par construction \mathcal{S} est normale. De plus, on dispose d'un revêtement de degré Π , ramifié :

$$\chi : \mathcal{S} \rightarrow (\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}.$$

Afin de préparer l'étude du groupe d'automorphismes de \mathcal{S} , on introduit une famille de courbes sur \mathcal{S} . Pour Q un point de \mathcal{D} , notons \mathcal{E}_Q l'image réciproque de $\mathcal{B} \times Q$ par χ et $\chi_Q : \mathcal{E}_Q \rightarrow \mathcal{B} \times Q$ le revêtement obtenu par restriction de χ . Si Q est un point générique¹ de $\mathcal{D} \otimes_L K^s$, la courbe \mathcal{E}_Q est irréductible, et le revêtement χ_Q est de degré Π . De plus, par construction, le degré du diviseur de ramification de ce revêtement est majoré par le produit $2IM$ (où, on le rappelle, I est le nombre de fonctions dans la famille $(f_i)_i$ et M est le maximum des degrés de ces fonctions). Le genre géométrique de \mathcal{E}_Q est donc majoré par :

$$g(\mathcal{E}_Q) \leq (g(\mathcal{B}) + IM)\Pi < g(\mathcal{D}). \quad (1)$$

On dispose aussi d'une minoration du genre de n'importe quel sous-revêtement non trivial de χ_Q . En effet, encore par construction, un tel sous-revêtement est de degré au moins égal à $p_1 \geq 3$ avec un diviseur de ramification de degré au moins égal à m (où m est le minimum des degrés des fonctions f_i), si bien que :

$$1 + 2(g(\mathcal{B}) - 1)\Pi + \Pi^2 < m \leq g(\text{sous-revêtement de } \chi_Q : \mathcal{E}_Q \rightarrow \mathcal{B}). \quad (2)$$

Les inégalités (1) et (2) seront utiles pour calculer le groupe d'automorphismes de \mathcal{S} .

4.2 Étude du groupe d'automorphismes de \mathcal{S}

Notons A le groupe des K^s -automorphismes de ψ . Vus comme des K^s -automorphismes de la surface $(\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}$, ces automorphismes se relèvent en des automorphismes de $K^s(\mathcal{S})/K^s$ qui fixent les y_i et qui stabilisent $K^s(\mathcal{B} \otimes_K L \times \mathcal{D})$ (dans la suite, nous adopterons la même notation pour un automorphisme de ψ et ses relèvements à $(\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}$ et à \mathcal{S}). Autrement dit, tout élément $\alpha \in A$ induit un automorphisme de \mathcal{S} et on peut voir A comme un sous-groupe de $\text{Aut}_{K^s}(\mathcal{S})$, le groupe de K^s -automorphismes de \mathcal{S} . On dispose d'un autre sous-groupe de $\text{Aut}_{K^s}(\mathcal{S})$, à savoir $B = \prod_i \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$ le groupe de Galois de l'extension $K^s(\mathcal{S})/K^s((\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D})$.

¹Par «point générique» de $\mathcal{D} \otimes_L K^s$, nous entendons, ici et dans la suite de ce texte, un point défini sur le corps des fonctions rationnelles $K^s(\mathcal{D})$.

En résumé, les éléments $\alpha \in A$, vus comme des éléments de $\text{Aut}_{K^s}(\mathcal{S})$ font commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} \otimes_L K^s & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{S} \otimes_L K^s \\ \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ ((\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}) \otimes_L K^s & \xrightarrow{\alpha} & ((\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}) \otimes_L K^s \end{array}$$

Les éléments $\beta \in B$, vus comme des éléments de $\text{Aut}_{K^s}(\mathcal{S})$ font commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} \otimes_L K^s & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{S} \otimes_L K^s \\ & \searrow \chi & \swarrow \chi \\ & ((\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}) \otimes_L K^s & \end{array}$$

Et il est clair que $A \times B \subset \text{Aut}_{K^s}(\mathcal{S})$. En fait l'inclusion inverse est vérifiée.

Lemme 4.2 *Le groupe des K^s -automorphismes de \mathcal{S} est égal à $A \times B$.*

Preuve — Soit α un K^s -automorphisme de \mathcal{S} .

Tout d'abord, si Q est un point générique de $\mathcal{D} \otimes_L K^s$, on sait grâce à l'inégalité (1) de la section 4.1, que $g(\mathcal{E}_Q) < g(\mathcal{D})$. Il en résulte que l'automorphisme α est tel que $\alpha(\mathcal{E}_Q) = \mathcal{E}_{\alpha(Q)}$ où α est un K^s -automorphisme de \mathcal{D} .

Vérifions que l'isomorphisme de $\mathcal{E}_Q \rightarrow \mathcal{E}_{\alpha(Q)}$ induit par α fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_Q & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{E}_{\alpha(Q)} \\ \chi_Q \downarrow & & \downarrow \chi_{\alpha(Q)} \\ \mathcal{B} \times Q & \xrightarrow{\text{id} \times \alpha} & \mathcal{B} \times \alpha(Q) \end{array}$$

avec $\text{id} \times \alpha$ comme isomorphisme en bas. Le produit des fonctions χ_Q et $\chi_{\alpha(Q)} \circ \alpha$ définit un morphisme :

$$\mathcal{E}_Q \xrightarrow{\chi_Q \times \chi_{\alpha(Q)} \circ \alpha} \mathcal{B} \times \mathcal{B},$$

dont l'image est un diviseur de bidegré $\leq (\Pi, \Pi)$. D'après le lemme 6.1, le genre arithmétique de cette image est au plus $1 + 2(g(\mathcal{B}) - 1)\Pi + \Pi^2$. D'autre part, en composant avec la première projection de $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, on s'aperçoit que cette image est *coincée* entre \mathcal{E}_Q et $\mathcal{B} \otimes_K K^s$. Mais on a vu, dans l'inégalité (2) de la section 4.1, qu'un tel sous-revêtement non-trivial de $\chi_Q : \mathcal{E}_Q \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$ a un genre géométrique au moins $m > 1 + 2(g(\mathcal{B}) - 1)\Pi + \Pi^2$. Il en résulte que l'image de $\chi_Q \times (\chi_{\alpha(Q)} \circ \alpha)$ est forcément K^s -isomorphe à \mathcal{B} si bien que c'est une correspondance de bidegré $(1, 1)$. Comme \mathcal{B} n'a pas de K^s -automorphisme non-trivial on en déduit que le diagramme précédent peut être complété en bas avec l'identité. Donc $\chi \circ \alpha = (\text{Id} \times \alpha) \circ \chi$.

Montrons maintenant que $\alpha \in A$. Pour cela, remarquons que pour Q un point générique de $\mathcal{D} \otimes_K K^s$, on vient de montrer que α induit un isomorphisme entre les revêtements $\chi_Q : \mathcal{E}_Q \rightarrow \mathcal{B}$

et $\chi_{\alpha(Q)} : \mathcal{E}_{\alpha(Q)} \rightarrow \mathcal{B}$. Ces deux revêtements ont donc mêmes données de ramification, c'est-à-dire respectivement les points P tels que $f_i(P) = f_i(\psi(Q))$ et $f_i(P) = f_i(\psi(\alpha(Q)))$. Ainsi :

$$\forall i, \quad f_i(\psi(Q)) = f_i(\psi(\alpha(Q)))$$

donc $\psi(Q) = \psi(\alpha(Q))$, car les f_i engendrent le corps $K(\mathcal{B})$. Autrement dit $\psi = \psi \circ \alpha$, ce qui signifie que $\alpha \in A$. Donc $\chi \circ \alpha = \alpha \circ \chi = \chi \circ \mathfrak{a}$. On pose $\beta = \mathfrak{a} \circ \alpha^{-1}$ et on vérifie que $\chi \circ \beta = \chi$ donc β est dans B . En conclusion, on a bien $\mathfrak{a} = \beta\alpha \in A \times B$. \square

Remarque 2 *La preuve ci-dessus montre que le groupe des K^s -automorphismes birationnels de \mathcal{S} est égal à $A \times B$. Nous n'aurons pas besoin de ce résultat.*

4.3 Corps des modules et corps de définition de \mathcal{S}

Tout d'abord, le corps des modules de \mathcal{S} est K car un isomorphisme entre ${}^\sigma\varphi$ et φ donne lieu à un isomorphisme entre ${}^\sigma\mathcal{S}$ et \mathcal{S} .

Ensuite, la surface \mathcal{S} étant construite à partir de $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K L$ sans extension des scalaires, tout corps de définition de φ est corps de définition de \mathcal{S} .

Il nous reste à vérifier que tout corps de définition de \mathcal{S} est aussi un corps de définition de φ ou, ce qui revient au même, de ψ . Pour cela, considérons ${}^\sigma\mathcal{S}$ et ${}^\tau\mathcal{S}$ deux conjugués de \mathcal{S} par action de Galois et $I : {}^\tau\mathcal{S} \rightarrow {}^\sigma\mathcal{S}$ un K^s -isomorphisme. Comme le groupe de K^s -automorphismes de la surface \mathcal{S} admet un unique sous-groupe d'ordre Π , il en va de même pour chacune de ses deux conjuguées et les deux groupes en questions se correspondent par I . On obtient donc par quotient, un K^s -isomorphisme de ${}^\tau((\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D})$ dans ${}^\sigma((\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D})$ qui envoie le graphe de ${}^\tau\psi$ dans celui de ${}^\sigma\psi$ (données de ramification des revêtements quotients) et donc l'empreinte de ${}^\tau\psi$ dans celle de ${}^\sigma\psi$. Ce procédé permet de définir un foncteur covariant qui transforme une donnée de descente pour \mathcal{S} en une donnée de descente pour l'empreinte du revêtement ψ sur la surface $(\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}$. Grâce au théorème 1.3, cela montre que tout corps de définition de \mathcal{S} , est aussi corps de définition de l'empreinte du revêtement ψ . En vertu du lemme 3.3, on sait qu'alors ce corps est aussi corps de définition de ψ .

Grâce, une nouvelle fois, au théorème 1.4, nous en déduisons que :

Corollaire 4.3 *Il existe des $\overline{\mathbb{Q}}$ -surfaces normales, projectives et géométriquement irréductibles, de corps des modules égal à \mathbb{Q} , définies sur tous les complétés de \mathbb{Q} , mais ne pouvant pas être définies sur \mathbb{Q} .*

5 Courbes

Dans cette section K est encore un corps de caractéristique nulle. Dans le même esprit que la section précédente, on donne ici un procédé assez général qui associe à un revêtement de courbes de corps des modules K , une K^s -courbe projective lisse, irréductible, de corps des modules K , ayant les mêmes corps de définition que le revêtement initial. Plus précisément on veut montrer le :

Théorème 5.1 *Soit \mathcal{B} une courbe définie sur K et soit $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K K^s$ un K^s -revêtement de corps des modules K . Il existe une K^s -courbe projective, irréductible, et lisse, de corps des modules K et ayant mêmes corps de définition que φ .*

Le point de départ est la surface \mathcal{S} construite à la section 4. On garde donc les notations de cette précédente section. On sait que \mathcal{S} a pour corps des modules K et pour corps de définition les corps de définition du revêtement $\varphi : \mathcal{C}/L \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K L$ (ou $\psi : \mathcal{D}/L \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K L$, cela revient au même).

L'idée est de tracer sur \mathcal{S} une courbe singulière (mais stable) héritant des propriétés de module et de définition de \mathcal{S} puis de déformer cette courbe pour aboutir à une courbe projective lisse tout en conservant évidemment les propriétés de module et de définition.

5.1 Deux courbes stables

Les notations sont celles de la section 4.1. Soit Γ l'union de tous les supports des diviseurs des fonctions g_i . Elle contient le lieu de ramification du revêtement χ .

Lemme 5.2 *Il existe deux fonctions non constantes $f, g \in K(\mathcal{B})$ telles que :*

- *le diviseur $((f)_0 + (f)_\infty) \times \mathcal{D}$ coupe transversalement Γ ;*
- *le diviseur $(\mathcal{B} \otimes_K L) \times ((g \circ \psi)_0 + (g \circ \psi)_\infty)$ coupe transversalement $\Gamma \cup [((f)_0 + (f)_\infty) \times \mathcal{D}]$;*
- *tout K^s -automorphisme de \mathcal{D} qui stabilise la fibre $(g \circ \psi)_0$ est en fait un automorphisme du revêtement ψ (notons que cette fibre est simple en vertu de la condition précédente) ;*
- *Pour tout zéro P de f , on note $\chi_P : \mathcal{F}_P \rightarrow P \times \mathcal{D}$ la restriction² de χ à $P \times \mathcal{D}$ et on demande que le revêtement $\kappa_P := g \circ \psi \circ \chi_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathbb{P}^1$ n'ait pas d'autres automorphismes que les éléments de $A \times B$:*

$$\text{Aut}_{K^s}(g \circ \psi \circ \chi_P) = \text{Aut}_{K^s}(\psi \circ \chi_P) = A \times B.$$

Preuve — Soit $f \in K(\mathcal{B})$ une fonction non-constante. On applique le lemme 6.2 à $L, \mathcal{B}, \mathcal{D}, \Gamma$ et f . On en déduit qu'il existe un x et un y distincts dans K tels que $(f)_x \times \mathcal{D}$ et $(f)_y \times \mathcal{D}$ coupent transversalement Γ . On remplace f par $(f - x)/(f - y)$ et la première condition est satisfaite.

On observe alors que pour tout zéro P de f , la courbe \mathcal{F}_P est lisse et géométriquement irréductible car $(f)_0 \times \mathcal{D}$ coupe transversalement le lieu Γ de ramification de χ . En outre

$$\text{Aut}_{K^s}(\psi \circ \chi_P) = A \times B$$

car $K^s(\mathcal{F}_P)/K^s(\mathcal{B})$ est le compositum de $K^s(\mathcal{D})/K^s(\mathcal{B})$ et de l'extension abélienne de $K^s(\mathcal{B})$ engendrée par les $g_i(P, \frac{1}{p_i}) = (f_i \circ \psi - f_i(P))^{\frac{1}{p_i}}$.

On cherche une fonction g dans $K(\mathcal{B})$ telle que $g \circ \psi$ n'ait pas d'autre K^s -automorphisme que les éléments de A et, pour tout zéro P de f , le revêtement $\kappa_P = g \circ \psi \circ \chi_P$ n'ait pas d'autre K^s -automorphisme que les éléments de $\text{Aut}_{K^s}(\psi \circ \chi_P) = A \times B$. D'après le lemme 6.4, les

²En toute rigueur il faudrait écrire $P \times (\mathcal{D} \otimes_L K^s)$.

fonctions de $K^s(\mathcal{B})$ qui ne satisfont pas toutes ces hypothèses sont contenues dans une union finie de sous- K -algèbres strictes. Il existe donc une telle fonction g .

D'après le lemme 6.2, les x dans K tels que $(g \circ \psi)_x$ ne coupe pas $\Gamma \cup [((f)_0 + (f)_\infty) \times \mathcal{D}]$ transversalement sont en nombre fini.

D'après le lemme 6.3, les x dans K tels que $(g \circ \psi)_x$ ait un K^s -automorphisme en dehors de A sont en nombre fini.

Donc il existe x et y distincts dans K tels que $(g \circ \psi)_x$ et $(g \circ \psi)_y$ coupent $\Gamma \cup [((f)_0 + (f)_\infty) \times \mathcal{D}]$ transversalement et $(g \circ \psi)_x$ n'ait pas d'autre automorphisme que les éléments de A . On remplace g par $(g - x)/(g - y)$ et les trois dernières conditions sont satisfaites. \square

Soit alors \mathcal{J}_0 la courbe, tracée sur $(\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}$, d'équation :

$$f(P) \times g \circ \psi(Q) = 0.$$

On peut montrer le résultat suivant.

Lemme 5.3 *La courbe \mathcal{J}_0 est stable et telle que $\text{Aut}_{K^s}(\mathcal{J}_0) \simeq A$.*

Preuve — La courbe \mathcal{J}_0 est réduite car les zéros de f et $g \circ \psi$ sont simples et ses points singuliers — c'est-à-dire les (P, Q) sur $(\mathcal{B} \otimes_K K^s) \times \mathcal{D}$ tels que $f(P) = g \circ \psi(Q) = 0$ — sont des points doubles ordinaires ; elle est donc semi-stable. Elle est aussi connexe et projective. Comme toutes ses composantes irréductibles sont isomorphes à \mathcal{B} ou \mathcal{D} toutes deux de genre ≥ 2 , la courbe \mathcal{J}_0 est bien une courbe stable.

Enfin $\text{Aut}_{K^s}(\mathcal{J}_0) \simeq A$: le groupe des K^s -automorphismes de \mathcal{J}_0 est le groupe A des automorphismes de ψ . En effet, un automorphisme α de \mathcal{J}_0 permute les composantes irréductibles. Certaines de ces composantes sont des copies de \mathcal{B} et d'autres sont des copies de \mathcal{D} . Comme \mathcal{B} et \mathcal{D} ne sont pas isomorphes, α respecte les deux sous-ensembles. La restriction de α à une composante isomorphe à \mathcal{B} , suivie de la projection sur \mathcal{B} est un morphisme non-constant de \mathcal{B} dans elle-même, donc l'identité car \mathcal{B} n'a pas d'automorphismes. Donc α stabilise chaque composante isomorphe à \mathcal{D} . Les points singuliers sur une telle composante sont les zéros de $g \circ \psi$. Comme l'ensemble de ces zéros n'est pas stabilisé par d'autres automorphismes que ceux de ψ , on peut supposer que α est trivial sur une des composantes isomorphes à \mathcal{D} (quitte à le composer avec un élément de A). Il doit donc stabiliser les composantes isomorphes à \mathcal{B} . Et comme elles n'ont pas d'automorphisme, il agit trivialement dessus. Comme α agit fidèlement sur les zéros de $g \circ \psi$, il agit trivialement sur toutes les composantes isomorphes à \mathcal{D} . \square

Soit \mathcal{K}_0 l'image réciproque de \mathcal{J}_0 par χ . On étudie à nouveau sa stabilité et on cerne un sous-groupe de son groupe d'automorphismes : le sous-groupe des automorphismes *déformables*, noté $\text{Aut}_{K^s}^{\text{déf.}}(\mathcal{K}_0)$. Nous expliquons maintenant le sens de ce terme.

Remarquons d'abord que les composantes de $\mathcal{K}_0 \otimes_L K^s$ sont de deux sortes. Certaines sont des revêtements de $(\mathcal{B} \otimes_K K^s) \times Q$ pour Q un K^s -zéro de $g \circ \psi$ et on les note \mathcal{E}_Q . Les autres sont des revêtements de $P \times (\mathcal{D} \otimes_K K^s)$ pour P un K^s -zéro de f et on les note \mathcal{F}_P . On note $\chi_P : \mathcal{F}_P \rightarrow P \times \mathcal{D}$ et $\chi_Q : \mathcal{E}_Q \rightarrow \mathcal{B} \times Q$ les restrictions de χ aux composantes de \mathcal{K}_0 . Soit T un point singulier de \mathcal{K}_0 tel que $\chi(T) = (P, Q)$. Donc T est dans l'intersection de \mathcal{E}_Q et \mathcal{F}_P . Le point de \mathcal{E}_Q correspondant à T est appelé R . Le point de \mathcal{F}_P correspondant à T est appelé S .

Donc $\chi_Q(R) = P$ et $\chi_P(S) = Q$. Donc $f \circ \chi_Q$ est une uniformisante pour \mathcal{E}_Q en R et $g \circ \psi \circ \chi_P$ est une uniformisante pour \mathcal{F}_P en S . Si α est un automorphisme de \mathcal{K}_0 et $T' = (R', S')$ l'image de $T = (R, S)$ par α on note $\chi(R') = (P', Q')$. Notons que $f \circ \chi_{Q'} \circ \alpha$ est une uniformisante pour \mathcal{E}_Q en R et $g \circ \psi \circ \chi_{P'} \circ \alpha$ est une uniformisante pour \mathcal{F}_P en S .

On appelle *automorphisme déformable* de \mathcal{K}_0 un automorphisme α tel qu'en tout point singulier T de \mathcal{K}_0 on ait

$$\frac{f \circ \chi_{Q'} \circ \alpha}{f \circ \chi_Q}(R) \times \frac{g \circ \psi \circ \chi_{P'} \circ \alpha}{g \circ \psi \circ \chi_P}(S) = 1 \quad (3)$$

où $\chi(T) = (P, Q)$ et $\chi(\alpha(T)) = (P', Q')$.

La justification de cette définition est donnée au paragraphe 5.2. Les automorphismes déformables forment clairement un sous-groupe du groupe des automorphismes de \mathcal{K}_0 .

Lemme 5.4 *La courbe \mathcal{K}_0 est stable et telle que $\text{Aut}_{K^s}^{\text{def}}(\mathcal{K}_0) \simeq A \times B$.*

Preuve — Il est évident que $A \times B$ agit (par restriction) sur \mathcal{K}_0 et que les automorphismes correspondants sont déformables.

La courbe \mathcal{K}_0 est tracée sur \mathcal{S} . Les conditions imposées sur les fonctions f et g permettent de montrer que \mathcal{K}_0 est une courbe stable. En raison de la simplicité de l'intersection de (f) et (g) avec le lieu de ramification Γ , les points singuliers de \mathcal{J}_0 se relèvent en des points singuliers de \mathcal{K}_0 qui restent de première espèce (ils sont simplement «démultipliés»). La connexité de \mathcal{K}_0 provient du fait que les fonctions g_i , dont on extrait une racine, ne peuvent pas être une puissance p_i -ème car aucune des fonctions $f_i - \lambda$, $\lambda \in K^s$, n'en est une, et pas davantage les $f_i \circ \psi - \lambda$ (cf. § 4.1).

Enfin, montrons que $\text{Aut}_{K^s}^{\text{def}}(\mathcal{K}_0) \simeq A \times B$. Pour le voir, remarquons que les composantes de $\mathcal{K}_0 \otimes_K K^s$ sont de deux sortes. Certaines sont des revêtements de $(\mathcal{B} \otimes_K K^s) \times Q$ pour Q un K^s -zéro de $g \circ \psi$ et on les a notés \mathcal{E}_Q . Les autres sont des revêtements de $P \times (\mathcal{D} \otimes_L K^s)$ pour P un K^s -zéro de f et on les a notés \mathcal{F}_P . Les \mathcal{F}_P et les \mathcal{E}_Q n'ont pas le même genre, donc elles ne peuvent être isomorphes. Ainsi tout K^s -automorphisme α de \mathcal{K}_0 stabilise l'ensemble des \mathcal{F}_P et celui des \mathcal{E}_Q .

Soit Q et Q' des K^s -zéros de $g \circ \psi$ tels que $\alpha(\mathcal{E}_Q) = \mathcal{E}_{Q'}$. Comme dans la preuve du lemme 4.2, on remarque que l'image de \mathcal{E}_Q dans le produit $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$, via le morphisme $\chi_Q \times \chi_{Q'} \circ \alpha$, a un genre arithmétique moindre que $1 + 2(g(\mathcal{B}) - 1)\Pi + \Pi^2$. Cela montre encore que cette image est K^s -isomorphe à \mathcal{B} (sinon l'image revêt \mathcal{B} par un revêtement non trivial de genre forcément plus grand que $1 + 2(g(\mathcal{B}) - 1)\Pi + \Pi^2$). Comme \mathcal{B} n'a toujours pas d'automorphisme, on en déduit à nouveau que α induit un isomorphisme de revêtements entre les restrictions $\chi_Q : \mathcal{E}_Q \rightarrow \mathcal{B}$ et $\chi_{Q'} : \mathcal{E}_{Q'} \rightarrow \mathcal{B}$ de χ . Ainsi

$$\chi_Q = \chi_{Q'} \circ \alpha. \quad (4)$$

Dès lors α stabilise chaque composante \mathcal{F}_P où P est un K^s -zéro de f . En effet, partons d'un point singulier $T = (R, S) \in \mathcal{E}_Q \cap \mathcal{F}_P$, où P est un K^s -zéro de f et où Q un K^s -zéro de $g \circ \psi$. On a donc $\chi(T) = (P, Q) \in \mathcal{B} \times \mathcal{D}$. On sait qu'il existe $P' \in \mathcal{B}(K^s)$ et $Q' \in \mathcal{D}(K^s)$ tels

que $\alpha(T) \in \mathcal{F}_{P'} \cap \mathcal{E}_{Q'}$ si bien que $\alpha(T) \in \mathcal{E}_{Q'} \cap \alpha(\mathcal{E}_Q)$ d'où $\alpha(\mathcal{E}_Q) = \mathcal{E}_{Q'}$. On est donc dans le contexte du paragraphe précédent, c'est-à-dire que :

$$P' = \chi_{Q'} \circ \alpha(T) = \chi_Q(T) = P.$$

Conclusion $P = P'$ puis $\alpha(\mathcal{F}_P) = \mathcal{F}_P$. De plus, en vertu des formules (3) et (4) on connaît le quotient :

$$\frac{g \circ \psi \circ \chi_P \circ \alpha}{g \circ \psi \circ \chi_P}(S) = 1. \quad (5)$$

Notons α_P la restriction de α à \mathcal{F}_P . C'est donc un automorphisme de \mathcal{F}_P ; mieux, montrons que c'est la restriction à \mathcal{F}_P d'un élément de $A \times B$. Pour cela, introduisons la fonction $\kappa_P = g \circ \psi \circ \chi_P \in K^s(\mathcal{F}_P)$. Elle est de degré $\deg(g) \times pd \times \Pi$ et ses zéros, tous simples, ne sont rien d'autre que les points d'intersection de \mathcal{F}_P avec les autres composantes de \mathcal{K}_0 . Comme α_P permute ces zéros, la fonction $\kappa_P \circ \alpha_P$ a les mêmes zéros que κ_P avec la même multiplicité, i.e. 1. Dès lors, seuls les pôles de la fonction κ_P peuvent être pôle de la fonction $\frac{\kappa_P}{\kappa_P \circ \alpha_P} - 1$. Cette dernière fonction est donc de degré inférieur ou égal à celui de κ_P . Or d'après (5), les zéros de κ_P sont aussi zéros de $\frac{\kappa_P}{\kappa_P \circ \alpha_P} - 1$. En bref, nous venons de montrer que si $\frac{\kappa_P}{\kappa_P \circ \alpha_P} - 1$ est non-nulle, elle a le même diviseur que κ_P : il existe donc une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que :

$$\frac{\kappa_P}{\kappa_P \circ \alpha_P} - 1 = c\kappa_P \quad \text{ou encore :} \quad \frac{1}{\kappa_P \circ \alpha_P} = \frac{1}{\kappa_P} + c.$$

Tenant compte de fait que α_P est d'ordre fini e , on en déduit que $ce = 0$, puis que $c = 0$, puis que $\kappa_P \circ \alpha_P = \kappa_P$. Autrement dit, α_P est un automorphisme du revêtement $\kappa_P = g \circ \psi \circ \chi_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathbb{P}^1$. Par hypothèse sur la fonction g , il en résulte que α_P est la restriction à \mathcal{F}_P d'un élément de $A \times B$.

Quitte à composer α par l'inverse de cet élément, on peut supposer que α_P est l'identité. En particulier, α fixe tous les points singuliers de \mathcal{K}_0 appartenant à \mathcal{F}_P . Du coup, α stabilise nécessairement toutes les composantes \mathcal{E}_Q pour Q zéro de $g \circ \psi$. Par restriction, il induit donc un automorphisme α_Q de \mathcal{E}_Q qui, d'après (4), est en fait un automorphisme de χ_Q . Comme de plus, il fixe un point dans (et même toute) la fibre non ramifiée au dessus de P du revêtement galoisien $\chi_Q : \mathcal{E}_Q \rightarrow \mathcal{B}$, nécessairement α_Q vaut l'identité. Ainsi α fixe point par point toutes les composantes \mathcal{E}_Q .

Il ne reste plus qu'à vérifier qu'il en est de même des composantes $\mathcal{F}_{P'}$ pour P' un autre zéro de f , i.e. distinct de P . Notons $\alpha_{P'}$ la restriction de α à $\mathcal{F}_{P'}$. On sait qu'elle coïncide avec la restriction d'un élément de $A \times B$ et qu'elle fixe tous les points singuliers de \mathcal{K}_0 appartenant à $\mathcal{F}_{P'}$, c'est-à-dire tous les points des fibres au dessus des zéros de $g \circ \psi$. Il suffit donc de vérifier que l'action de $A \times B$ sur l'union de ces fibres est libre. C'est assurément le cas pour les éléments de B car les zéros de $g \circ \psi$ sont, par hypothèse, non ramifiés dans le revêtement galoisien $\chi_{P'} : \mathcal{F}_{P'} \rightarrow \mathcal{D}$. Ça l'est encore pour les éléments de $A \times B$ car l'action de A sur les zéros de $g \circ \psi$ est aussi libre. \square

5.2 Déformations

Nous allons maintenant déformer les deux courbes stables précédentes pour faire en sorte qu'elles soient chacune la fibre spéciale d'une famille de courbes. Si $x \in K^s$ est un scalaire, il est naturel de considérer la courbe \mathcal{J}_x tracée sur $\mathcal{I} = (\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}$ et définie par l'équation $f(P) \times g(\psi(Q)) = x$. On note \mathcal{K}_x l'image réciproque de \mathcal{J}_x par χ . Nous montrons dans ce paragraphe et dans le suivant que pour presque tout x dans K , la courbe \mathcal{K}_x est lisse et géométriquement irréductible, de groupe d'automorphismes $A \times B$, et qu'elle a même corps des modules et mêmes corps de définition que le revêtement φ de départ. Pour ce faire, nous voulons regarder les familles $(\mathcal{J}_x)_x$ et $(\mathcal{K}_x)_x$ comme des fibrations au-dessus de \mathbb{P}^1 . Mais il faut être prudent : la famille de courbes $(\mathcal{J}_x)_x$ admet des points bases. C'est pourquoi nous commençons par éclater la surface $\mathcal{I} = (\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}$ le long de

$$c = ((f)_\infty \times (g \circ \psi)_0) \cup ((f)_0 \times (g \circ \psi)_\infty).$$

Notons que c est union de $2 \times \deg(f) \times \deg(g \circ \psi)$ points géométriques simples. Soit $\mathcal{I}_{\infty, \infty} \subset \mathcal{I} = (\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}$ l'ouvert complémentaire de $((f)_\infty \times \mathcal{D}) \cup (\mathcal{B} \times (g \circ \psi)_\infty)$ dans $(\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}$. On définit de même $\mathcal{I}_{0,0}$, $\mathcal{I}_{0,\infty}$, $\mathcal{I}_{\infty,0}$. Ces quatre ouverts recouvrent $(\mathcal{B} \otimes_K L) \times \mathcal{D}$.

On note $\mathbb{P}_L^1 = \text{Proj}(L[X_0, X_1])$ la droite projective sur L . On note $F = 1/f$ et $G = 1/g$. Soit $\mathcal{J}_{\infty,0} \subset \mathcal{I}_{\infty,0} \times \mathbb{P}_L^1$ l'ensemble des $(P, Q, [X_0 : X_1])$ tels que $f(P)X_0 = G(\psi(Q))X_1$. Soit $\mathcal{J}_{0,\infty} \subset \mathcal{I}_{0,\infty} \times \mathbb{P}_L^1$ l'ensemble des $(P, Q, [X_0 : X_1])$ tels que $g(\psi(Q))X_0 = F(P)X_1$. Soit $\mathcal{J}_{\infty,\infty} \subset \mathcal{I}_{\infty,\infty} \times \mathbb{P}_L^1$ l'ensemble des $(P, Q, [X_0 : X_1])$ tels que $f(P)g(\psi(Q))X_0 = X_1$. Soit $\mathcal{J}_{0,0} \subset \mathcal{I}_{0,0} \times \mathbb{P}_L^1$ l'ensemble des $(P, Q, [X_0 : X_1])$ tels que $X_0 = F(P)G(\psi(Q))X_1$. On note $\mathcal{J} \subset \mathcal{I} \times \mathbb{P}_L^1$ le recollement de ces quatre ensembles, $b_{\mathcal{I}} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ la projection sur le premier facteur et $j : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{P}_L^1$ la projection sur \mathbb{P}_L^1 . C'est un morphisme plat, projectif, surjectif.

Soit $\mathcal{K} \subset \mathcal{S} \times \mathbb{P}_L^1$ l'image inverse de \mathcal{J} par $\chi \times \text{Id}$ où $\text{Id} : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow \mathbb{P}_L^1$ est l'identité. C'est l'éclatement de \mathcal{J} le long de $\chi^{-1}(c)$. Notons que $\chi^{-1}(c)$ est union de $\deg(\chi) \times \deg(f) \times \deg(g \circ \psi)$ points géométriques simples car χ est non ramifié au dessus de c . En fait, \mathcal{K} est la normalisation de \mathcal{J} dans $L(\mathcal{S})$. On note encore $\chi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}$ le morphisme correspondant. Soit $b_{\mathcal{S}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}$ la projection sur le premier facteur. Soit $k : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{P}_L^1$ la projection sur le second facteur. C'est le morphisme composé $k = j \circ \chi$. C'est un morphisme plat, propre et surjectif.

Soit $\mathbb{A}_L^1 \subset \mathbb{P}_L^1$ le spectre de $L[X]$ avec $X = X_1/X_0$. La fonction X permet d'identifier $\mathbb{A}_L^1(K^s)$ avec K^s . Pour tout point x de $\mathbb{A}^1(K^s)$ on note \mathcal{J}_x la fibre de j au-dessus de x et \mathcal{K}_x la fibre de k au dessus de x . La restriction de $b_{\mathcal{I}}$ à \mathcal{J}_x est une immersion fermée. On peut donc voir \mathcal{J}_x comme une courbe tracée sur $\mathcal{I} = \mathcal{B} \times \mathcal{D}$. De même, la restriction de $b_{\mathcal{S}}$ à \mathcal{K}_x est une immersion fermée. On peut donc voir \mathcal{K}_x comme une courbe tracée sur \mathcal{S} . On note \mathcal{J}_η la fibre générique de j et \mathcal{K}_η celle de k . La fibre de j en 0 est isomorphe (par le morphisme $b_{\mathcal{I}}$) à la courbe stable \mathcal{J}_0 introduite au paragraphe 5.1. De même, la fibre de k en 0 est isomorphe (par le morphisme $b_{\mathcal{S}}$) à la courbe stable \mathcal{K}_0 introduite au paragraphe 5.1.

Montrons que $\mathcal{J}_\eta/L(X)$ est géométriquement connexe et que pour presque tout $x \in \mathbb{A}^1(K^s)$ la courbe \mathcal{J}_x est géométriquement connexe sur $L(x)$. D'après le théorème de factorisation de Stein [Liu02, Chapter 5, Exercise 3.11], on peut factoriser $j : \mathcal{J}/L \rightarrow \mathbb{A}_L^1$ en $j_f \circ j_c$ avec j_c à fibres géométriquement connexes et j_f fini et dominant. La fibre de j_f au dessus de 0 est triviale car \mathcal{J}_0 est connexe et réduite. Donc le degré de j_f est 1 d'après [Liu02, Chapter 5, Exercice

1.25]. Donc j_f est un isomorphisme au dessus d'un ouvert de \mathbb{A}_L^1 . La fibre générique \mathcal{J}_η est géométriquement connexe sur $L(X)$ et pour presque tout $x \in \mathbb{A}^1(K^s)$ la courbe \mathcal{J}_x est géométriquement connexe sur $L(x)$. Le même raisonnement montre que \mathcal{K}_η est géométriquement connexe sur $L(X)$ et pour presque tout $x \in \mathbb{A}^1(K^s)$ la courbe \mathcal{K}_x est géométriquement connexe sur $L(x)$.

Montrons maintenant que \mathcal{J}_η est lisse. Elle est lisse en dehors des points $(P, Q) \in \mathcal{J}_\eta \subset \mathcal{B} \times \mathcal{D}$ où $df(P) = 0$ et $d(g \circ \psi)(Q) = 0$. De tels points sont définis sur K^s donc la fonction $f(P) \times g(\psi(Q))$ ne peut pas prendre la valeur transcendante X en ces points.

Le lieu Γ de ramification de χ coupe transversalement la fibre \mathcal{J}_0 . Donc il coupe transversalement la fibre générique \mathcal{J}_η . Donc \mathcal{K}_η est lisse elle aussi. Ainsi, pour presque tout $x \in K^s$ les fibres \mathcal{J}_x et \mathcal{K}_x sont lisses.

Enfin, la connaissance de $\text{Aut}_{K^s}^{\text{def}}(\mathcal{K}_0)$ permet de montrer que $\text{Aut}_{\overline{K(X)}}(\mathcal{K}_\eta) \simeq A \times B$. Soit $R = K^s[[X]]$. La courbe localisée $\hat{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{A}_L^1} \text{Spec}(R)$ est stable sur le spectre de R . D'après [Liu02, Chapter 10, Proposition 3.38, Remarque 3.39] le foncteur automorphismes $t \mapsto \text{Aut}_t(\hat{\mathcal{K}}_t)$ est représentable par un schéma fini et non-ramifié sur $\text{Spec } R$ et l'application de spécialisation $\text{Aut}_{K^s((X))}(\hat{\mathcal{K}}_\eta) \rightarrow \text{Aut}_{K^s}(\mathcal{K}_0)$ est injective. Elle prend ses valeurs dans le sous-groupe des K^s -automorphismes déformables de \mathcal{K}_0 d'après le lemme 6.6. Comme $\text{Spec } R$ n'a pas de revêtement non-ramifié, on en déduit que le groupe des automorphismes géométriques de la fibre générique satisfait

$$A \times B \subset \text{Aut}_{\overline{K(X)}}(\mathcal{K}_\eta) \subset \text{Aut}_{K^s((X))}(\mathcal{K}_\eta) \subset \text{Aut}_{K^s}^{\text{def}}(\mathcal{K}_0).$$

Comme le dernier groupe, on l'a vu, est égal à $A \times B$, on en déduit bien que $\text{Aut}_{\overline{K(X)}}(\mathcal{K}_\eta) = A \times B$.

5.3 Corps de modules, corps de définition dans les fibres de \mathcal{K}

Pour conclure nous montrons l'existence de fibres \mathcal{K}_x avec $x \in \mathbb{A}^1(K)$, lisses, géométriquement irréductibles, ayant même corps des modules que \mathcal{S} (c'est-à-dire K par hypothèse), et mêmes corps de définition.

On vient de voir que pour presque tout $x \in \mathbb{A}^1(K)$, la fibre \mathcal{K}_x est lisse et géométriquement connexe, donc géométriquement irréductible. Compte tenu du lemme 6.7 sur la spécialisation du groupe des automorphismes dans une famille de courbes rationnelles, pour presque tout $x \in \mathbb{A}^1(K)$, le groupe de K^s -automorphismes de la fibre \mathcal{K}_x est isomorphe au groupe des $\overline{K(X)}$ -automorphismes de la fibre générique. Comme le groupe d'automorphismes de la fibre générique est aussi isomorphe au groupe $A \times B$ des automorphismes de \mathcal{S} , on en déduit que la restriction induit, pour presque tout x , un isomorphisme :

$$\text{Aut}_{K^s}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\simeq} \text{Aut}_{K^s}(\mathcal{K}_x).$$

Soit donc $x \in K$ tel que \mathcal{K}_x soit lisse et géométriquement irréductible et $\text{Aut}_{K^s}(\mathcal{K}_x) = A \times B$. Montrons que \mathcal{K}_x possède toutes les propriétés de module et de définition escomptées.

Tout d'abord, la construction de \mathcal{K} n'impliquant pas d'extension des scalaires, à tout modèle de φ défini sur un corps $M \supset K$ on associe un M -modèle de la courbe \mathcal{K}_x .

Ensuite, la surface \mathcal{S} a K pour corps de modules, et pour tout $\sigma \in \text{Gal}(K)$, on sait qu'il existe un K^s -isomorphisme $\varphi_\sigma : \mathcal{S} \rightarrow {}^\sigma\mathcal{S}$. Par restriction, ces φ_σ induisent des K^s -isomorphismes entre \mathcal{K}_x et ${}^\sigma\mathcal{K}_x$. Donc le corps des modules de \mathcal{K}_x est K .

En fait, tout K^s -isomorphisme entre \mathcal{K}_x et ${}^\sigma\mathcal{K}_x$ est restriction d'un K^s -isomorphisme entre \mathcal{S} et ${}^\sigma\mathcal{S}$. Il existe en effet un tel isomorphisme, et les groupes d'automorphismes de \mathcal{K}_x et de \mathcal{S} sont les mêmes. Comme la correspondance est bijective, toute donnée de descente pour \mathcal{K}_x s'étend en une donnée de descente pour \mathcal{S} .

Cela termine la démonstration du théorème 5.1. Le théorème 5.1 permet de démontrer le théorème 1.1 à l'aide du théorème 1.4. Notons que Jean-François Mestre a construit dans [Mes91] des obstruction *locales* à l'existence d'un modèle défini sur le corps des modules d'une courbe.

6 Quelques résultats intermédiaires d'ordre général

6.1 Sur les courbes et les produits de deux courbes

Lemme 6.1 *Soit K un corps de caractéristique nulle. Soient \mathcal{B} et \mathcal{C} deux K -courbes algébriques projectives, réduites, lisses et géométriquement irréductibles de genres β et γ respectivement. On fixe P un point géométrique de \mathcal{B} et Q un point géométrique de \mathcal{C} et on note abusivement $\mathcal{B} = \mathcal{B} \times Q$ et $\mathcal{C} = P \times \mathcal{C}$. Soit Γ un diviseur de $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ de bidegré (b, c) , i.e. tel que $b = \mathcal{B} \cdot \Gamma$ et $c = \mathcal{C} \cdot \Gamma$. Le genre arithmétique virtuel π de Γ est au plus $1 + bc + c(\beta - 1) + b(\gamma - 1)$. Dans le cas $b = c$ cette borne vaut $1 + 2b(\beta - 1) + b^2$.*

Preuve — On s'inspire ici de la preuve de Weil de l'hypothèse de Riemann pour les courbes (cf. [Har77, Exercice V-1.10]).

La classe d'équivalence algébrique du diviseur canonique de $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ est $K = 2(\beta - 1)\mathcal{C} + 2(\gamma - 1)\mathcal{B}$. Grâce à la formule d'adjonction, on sait que $\pi = \frac{D \cdot (D + K)}{2} + 1$ (cf. [Har77, Exercice V-1.3]). On a donc :

$$\pi = \frac{D \cdot (D + 2(\beta - 1)\mathcal{C} + 2(\gamma - 1)\mathcal{B})}{2} + 1 = \frac{D \cdot D + 2c(\beta - 1) + 2b(\gamma - 1)}{2} + 1,$$

et il ne reste plus qu'à majorer l'auto-intersection $D \cdot D$. L'inégalité de Castelnuovo et Severi (cf. [Har77, Exercice V-1.9]) nous apprend que $D \cdot D \leq 2bc$, d'où le résultat. \square

Lemme 6.2 *Soit K un corps de caractéristique nulle. Soient \mathcal{B} et \mathcal{C} deux K -courbes algébriques projectives lisses, géométriquement irréductibles et réduites. Soit Γ un diviseur sans multiplicité de la surface $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Soit $f \in K(\mathcal{B})$ une fonction non constante. Pour tout élément x de K^s sauf un nombre fini, le diviseur $(f)_x \times \mathcal{C}$ coupe transversalement Γ , où $(f)_x$ désigne le diviseur $f^{-1}(x)$.*

Preuve — Notons $p_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ la première projection. L'ensemble E des points de $\mathcal{B}(K^s)$ tels que dans $p_{\mathcal{B}}^{-1}(P)$ il y ait soit un point singulier de Γ , soit un point ramifié du morphisme $\Gamma \rightarrow \mathcal{B}$ obtenu par restriction de $p_{\mathcal{B}}$, ou tels que la fibre $p_{\mathcal{B}}^{-1}(P)$ soit contenue dans Γ , est fini. Donc pour tout $x \in K^s$ sauf un nombre fini, la fibre $f^{-1}(x)$ évite E et elle est simple. \square

Lemme 6.3 Soit K un corps de caractéristique nulle. Soit \mathcal{B} une K -courbe algébrique projective lisse, géométriquement irréductible et réduite. On suppose que le genre de \mathcal{B} est au moins 2. Soit $f \in K(\mathcal{B})$ une fonction non-constante. On note G le groupe des K^s -automorphismes de f . C'est l'ensemble des K^s -automorphismes α de \mathcal{B} tels que $f \circ \alpha = f$. Pour tout $x \in \mathbb{P}^1(K^s)$, on note $(f)_x = f^{-1}(x)$ la fibre au dessus de x et G_x le groupe des K^s -automorphismes de \mathcal{B} qui stabilisent l'ensemble des K^s -points de $(f)_x$.

Pour tout x de $\mathbb{P}^1(K^s)$ sauf un nombre fini on a $G_x = G$.

Preuve — Le groupe $H = \text{Aut}_{K^s}(\mathcal{B})$ des K^s -automorphismes de \mathcal{B} est fini car le genre de \mathcal{B} est au moins égal à 2. Soit α un automorphisme dans $H - G$ et soit $x \in \mathbb{P}^1(K^s)$. Supposons que les K^s -points de $(f)_x$ sont stabilisés par α . Soit P l'un d'eux. Alors $f \circ \alpha(P) = f(P) = x$. Ainsi P est un zéro de la fonction non-nulle $f \circ \alpha - f$. Pour chaque α on trouve un nombre fini de tels zéros. Et les α sont en nombre fini. Donc les x , qui sont images par f de tels P , sont eux aussi en nombre fini. \square

Lemme 6.4 Soit K un corps de caractéristique nulle. Soit \mathcal{B} une K -courbe algébrique projective lisse, géométriquement irréductible et réduite. Soit $L \subset K^s$ une extension algébrique de K . Soit \mathcal{C} une L -courbe algébrique projective lisse, géométriquement irréductible et réduite. On suppose que le genre de \mathcal{B} est au moins 2. Soit $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_K L$ un L -morphisme non-constant. On note G le groupe des K^s -automorphismes de φ . C'est l'ensemble des K^s -automorphismes α de \mathcal{C} tels que $\varphi \circ \alpha = \varphi$. Pour toute fonction f dans $K^s(\mathcal{B})$ on note $G_f = \text{Aut}_{K^s}(f \circ \varphi)$ le groupe des K^s -automorphismes de $f \circ \varphi$. On a $G \subset G_f$. On note $V \subset K(\mathcal{B})$ l'ensemble des fonctions f telles que $G_f \neq G$. L'ensemble V est contenu dans une union finie de K -algèbres strictes de $K(\mathcal{B})$.

Preuve — Par l'équivalence catégorielle entre les corps de fonctions et les courbes (projectives lisses, etc ...), l'énoncé à prouver se ramène à un résultat concernant les corps de fonctions $K^s(f) \subset K^s(\mathcal{B}) \subset K^s(\mathcal{C})$ et les groupes qui entrent en jeu sont les suivants :

$$\begin{cases} G = \text{Aut}_{K^s}(\varphi) = \text{Aut}_{K^s(\mathcal{B})}(K^s(\mathcal{C})), \\ G_f = \text{Aut}_{K^s}(f \circ \varphi) = \text{Aut}_{K^s(f)}(K^s(\mathcal{C})), \\ A = \text{Aut}_{K^s}(\mathcal{C}) = \text{Aut}_{K^s}(K^s(\mathcal{C})), \end{cases} \Rightarrow G \subset G_f \subset A.$$

Dans ce contexte l'ensemble V admet la description :

$$V = \left(\bigcup_{\alpha \in A \setminus G} K^s(\mathcal{C})^\alpha \cap K^s(\mathcal{B}) \right) \cap K(\mathcal{B}) = \bigcup_{\alpha \in A \setminus G} K^s(\mathcal{C})^\alpha \cap K(\mathcal{B}).$$

Cette réunion est finie, le groupe A l'étant puisque \mathcal{C} est de genre ≥ 2 . De plus, comme $\alpha \notin G$, chacune des sous-extensions $K^s(\mathcal{C})^\alpha \cap K^s(\mathcal{B})$ est une sous-extension stricte de $K^s(\mathcal{B})$, contenant K^s ; en descendant à K , on préserve l'inclusion stricte $K^s(\mathcal{C})^\alpha \cap K(\mathcal{B}) \subsetneq K(\mathcal{B})$. \square

6.2 Déformation d'automorphismes

Dans ce paragraphe nous donnons une condition nécessaire pour qu'un automorphisme d'une courbe nodale s'étende à une déformation de cette courbe.

Soit R un anneau de valuation discrète complet, π une uniformisante et k son corps résiduel supposé algébriquement clos. On considère \mathcal{K} une courbe stable sur $\text{Spec}(R)$; la fibre générique est notée \mathcal{K}_η , la fibre spéciale \mathcal{K}_0 . On considère T un point singulier de \mathcal{K}_0 . D'après [Liu02, Chap 10, Corollaire 3.22], on sait que l'anneau local complété de \mathcal{K} en T est de la forme :

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{K},T} = R[[f, g]] / \langle fg - \pi^e \rangle$$

avec $e \in \mathbb{N}$. Cet entier s'appelle *l'épaisseur* de \mathcal{K} en T . On dit aussi que f et g forment un système de coordonnées de \mathcal{K} en T . En réduisant modulo π , on obtient l'anneau local complété de \mathcal{K}_0 en T :

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{K}_0,T} = \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{K},T} / \langle \pi \rangle = k[[\bar{f}, \bar{g}]] / \langle \bar{f}\bar{g} \rangle,$$

où $\bar{f} = f \bmod \pi$ et $\bar{g} = g \bmod \pi$. Comme en tout point double ordinaire, on sait que, localement en T , \mathcal{K}_0 possède deux branches \mathcal{F} et \mathcal{G} (composantes irréductibles) ; les fonctions \bar{f} et \bar{g} en sont les uniformisantes respectives. On note P et Q les points de \mathcal{F} et \mathcal{G} correspondant à T .

Soit T' un autre point singulier de \mathcal{K}_0 auquel on associe les données $f', g', e', \mathcal{F}', \mathcal{G}'$ comme précédemment.

Considérons α un automorphisme de \mathcal{K} sur R tel que $\alpha(T) = T'$ et $\alpha(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$, $\alpha(\mathcal{G}) = \mathcal{G}'$. On vérifie aisément que les fonctions $f' \circ \alpha$ et $g' \circ \alpha$ forment aussi un système de coordonnées de \mathcal{K} en T . On en déduit que $e' = e$ mais aussi que $f' \circ \alpha / f$ et $g' \circ \alpha / g$ sont des inversibles de $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{K},T}$ (à chaque fois le numérateur et le dénominateur ont même diviseur de Weil). Comme de plus on a $f \times g = \pi^e = f' \circ \alpha \times g' \circ \alpha$, il en résulte que $\frac{f' \circ \alpha}{f}(T) \times \frac{g' \circ \alpha}{g}(T) = 1$. En réduisant modulo π et en se plaçant sur chacune des deux branches locales de \mathcal{K}_0 en T , on en déduit que :

$$\frac{\bar{f}' \circ \bar{\alpha}}{\bar{f}}(P) \times \frac{\bar{g}' \circ \bar{\alpha}}{\bar{g}}(Q) = 1. \quad (6)$$

Définition 6.5 Soit R un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel k algébriquement clos. Soit \mathcal{K} une courbe semi-stable sur $\text{Spec}(R)$. La fibre générique de \mathcal{K} est supposée lisse. On se donne un système de coordonnées en chaque point singulier de la fibre spéciale \mathcal{K}_0 . Soit $\bar{\alpha}$ un automorphisme de \mathcal{K}_0/k . On dit que $\bar{\alpha}$ est déformable dans $\mathcal{K}/\text{Spec}(R)$ si pour tout point singulier T de \mathcal{K}_0 , l'image $\bar{\alpha}(T)$ a la même épaisseur que T dans \mathcal{K} , et si l'égalité (6) est satisfaite.

Lemme 6.6 Avec les notations de la définition 6.5, l'ensemble des automorphismes de \mathcal{K}_0/k déformables dans $\mathcal{K}/\text{Spec}(R)$ est un sous-groupe de $\text{Aut}_k(\mathcal{K}_0)$. Si α est un automorphisme de \mathcal{K} sur $\text{Spec}(R)$, sa réduction $\bar{\alpha} = \alpha \bmod \pi$ est un automorphisme de \mathcal{K}_0/k déformable dans $\mathcal{K}/\text{Spec}(R)$.

On pourra comparer cet énoncé à [Wew99, Theorem 3.1.1] qui concerne les déformations de morphismes entre deux courbes distinctes.

6.3 Sur les automorphismes d'une famille de courbes

Nous démontrons dans cette section un lemme de spécialisation du groupe des automorphismes d'une courbe dépendant d'un paramètre.

Soit K un corps de caractéristique nulle et soit \mathcal{U} une courbe affine lisse, géométriquement irréductible et réduite sur K . Soit X une surface quasi-projective lisse, géométriquement irréductible et réduite. Soit $\pi : X \rightarrow \mathcal{U}$ un morphisme projectif, lisse, surjectif, de dimension relative 1. On suppose que pour tout point géométrique $\epsilon \in \mathcal{U}(K^s)$ de \mathcal{U} , la fibre X_ϵ est géométriquement irréductible.

Toutes les fibres ont le même genre géométrique g supposé au moins égal à 3.

On veut montrer qu'il existe un K -ouvert non-vide \mathcal{V} de \mathcal{U} tel que pour tout point géométrique $\epsilon \in \mathcal{V}(K^s)$ le groupe des automorphismes sur K^s de la fibre en ϵ soit égal au groupe

$$\text{Aut}_{\overline{K(\mathcal{U})}}(X_\eta \otimes_{K(\mathcal{U})} \overline{K(\mathcal{U})})$$

des automorphismes de la fibre générique X_η .

Supposons d'abord que la fibre générique X_η est non-hyperelliptique (ce qui revient à dire que le nombre de points de Weierstrass est plus grand que $2g + 2$).

Quitte à remplacer K par une extension finie et \mathcal{U} par un revêtement fini étale d'un ouvert non-vide de \mathcal{U} , on peut supposer que les points de Weierstrass de la fibre générique sont définis sur le corps $K(\mathcal{U})$. L'adhérence de Zariski de ces points définit des sections horizontales de la famille $\pi : X \rightarrow \mathcal{U}$. Quitte à restreindre \mathcal{U} un peu plus, on peut supposer que ces sections ne se croisent pas. Donc aucune fibre de la famille n'est hyperelliptique.

Il existe g points de Weierstrass $P_{1,\eta}, P_{2,\eta}, \dots, P_{g,\eta}$ de la fibre générique qui sont linéairement indépendants dans son modèle canonique. On choisit une base $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ des différentielles holomorphes de la fibre générique, adaptée à ces g points (i.e. $\omega_i(P_{j,\eta}) = 0$ si $i \neq j$). Quitte à restreindre un peu plus l'ouvert \mathcal{U} on peut supposer que ces g formes se spécialisent en tout point $x \in \mathcal{U}$ pour former une base des formes holomorphes de la fibre en x .

On obtient donc une famille de plongements canoniques

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathcal{U} \times \mathbb{P}^{g-1} \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathcal{U} & & \end{array}$$

Pour chaque fibre de la famille $\pi : X \rightarrow \mathcal{U}$, le groupe d'automorphismes peut-être vu comme sous-groupe du groupe des permutations S_W des points de Weierstrass³. En particulier, si $\epsilon \in \mathcal{U}(K^s)$ est un point fermé et η le point générique alors $\text{Aut}_{K^s(\mathcal{U})}(X_\eta) \subset \text{Aut}_{K^s}(X_\epsilon) \subset S_W$.

On veut montrer que les ϵ tels que la première inclusion soit stricte sont contenus dans un fermé strict de \mathcal{U} . On choisit une permutation $\sigma \in S_W$ telle que $\sigma \notin \text{Aut}_{K^s(\mathcal{U})}(X_\eta)$. On associe à σ une transformation projective linéaire de \mathbb{P}^{g-1} par prolongement de l'action linéaire sur les P_1, \dots, P_g (adhérences de Zariski des $P_{1,\eta}, P_{2,\eta}, \dots, P_{g,\eta}$). Ce prolongement est unique car les P_i sont indépendants. On le note τ . C'est un automorphisme de \mathbb{P}^{g-1} sur \mathcal{U} . Quitte à remplacer

³Donc tous les automorphismes de X_η sont définis sur $K^s(\mathcal{U})$, c'est-à-dire $\text{Aut}_{\overline{K(\mathcal{U})}}(X_\eta) = \text{Aut}_{K^s(\mathcal{U})}(X_\eta)$.

K par une extension finie et \mathcal{U} par un revêtement fini étale d'un ouvert non-vide de \mathcal{U} , on peut supposer qu'il existe un $K(\mathcal{U})$ -point $Q_\eta \in X_\eta$ de la fibre générique tel que $\tau(Q_\eta)$ ne soit pas dans cette fibre. On prolonge ce point en une section rationnelle Q de π . L'ensemble des $x \in \mathcal{U}$ tels que $\tau(Q_x)$ soit dans la fibre X_x est un fermé strict de \mathcal{U} .

Dans le cas où la fibre générique est hyperelliptique, notons $c_\eta : X_\eta \rightarrow \mathbb{P}^1/K(\mathcal{U})$ le morphisme canonique de degré 2, quotient par l'involution. Soient $P_{1,\eta}, \dots, P_{2g+2,\eta}$ les points de \mathbb{P}^1 où c_η se ramifie. Quitte à remplacer K par une extension finie et \mathcal{U} par un revêtement étale d'un ouvert non-vide, on peut supposer que le morphisme c_η s'étend en un morphisme $c : X/\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{P}^1/\mathcal{U}$, que tous les $P_{i,\eta}$ sont définis sur $K(\mathcal{U})$, et que leurs adhérences de Zariski dans \mathbb{P}^1/\mathcal{U} (notées P_i) ne se croisent pas.

Soit x un point de \mathcal{U} . Tout $\overline{L(x)}$ -automorphisme de X_x normalise l'involution et induit un automorphisme de $\mathbb{P}^1/\overline{L(x)}$ qui stabilise les $P_{i,x}$. On note G_x l'ensemble de ces automorphismes. Ce groupe est isomorphe au quotient du groupe des $\overline{L(x)}$ -automorphismes de X_x par l'involution.

On note \mathcal{M} l'ensemble des injections de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{1, 2, \dots, 2g + 2\}$. Le groupe G_x peut-être vu comme sous-ensemble de \mathcal{M} : on associe à 1 (resp. 2, 3) l'indice de l'image de $P_{1,x}$ (resp. $P_{2,x}, P_{3,x}$). En particulier si $\epsilon \in \mathcal{U}(K^s)$ est un point fermé et η le point générique alors $G_\eta \subset G_\epsilon \subset \mathcal{M}$.

On veut montrer que les ϵ tels que l'inclusion soit stricte sont contenus dans un fermé strict de \mathcal{U} . On choisit une injection $\sigma \in \mathcal{M}$ telle que $\sigma \notin G_\eta$. On associe à σ la transformation projective linéaire de \mathbb{P}^1/\mathcal{U} qui envoie P_i sur $P_{\sigma(i)}$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. On la note τ . C'est un automorphisme de \mathbb{P}^1 sur \mathcal{U} . Il existe un indice j entre 4 et $2g + 2$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, 2g + 2\}$ $\tau(P_{j,\eta}) \neq P_{i,\eta}$. L'ensemble de $x \in \mathcal{U}$ tels que $\tau(P_{j,x})$ soit égal à l'un des $P_{i,x}$ est un fermé strict de \mathcal{U} .

Lemme 6.7 *Soit K un corps de caractéristique nulle et \mathcal{U} une courbe affine lisse géométriquement irréductible et réduite sur K . Soit X une surface quasi-projective lisse géométriquement irréductible et réduite. Soit $\pi : X \rightarrow \mathcal{U}$ un morphisme surjectif, projectif et lisse de dimension relative 1. On suppose que pour tout point ϵ de \mathcal{U} , la fibre X_ϵ en ϵ est géométriquement irréductible. On note η le point générique de \mathcal{U} et $\bar{S}_\eta = S_\eta \otimes_{K(\mathcal{U})} \overline{K(\mathcal{U})}$ la fibre générique vue comme courbe sur la clôture algébrique du corps des fonctions de la base \mathcal{U} .*

Il existe un K -ouvert non-vide \mathcal{V} de \mathcal{U} tel que pour tout point fermé $\epsilon \in \mathcal{V}(K^s)$ le groupe des automorphismes sur K^s de la fibre en ϵ soit égal au groupe $\text{Aut}_{\overline{K(\mathcal{U})}}(\bar{S}_\eta)$ des automorphismes de \bar{S}_η .

Références

- [CR04] Jean-Marc Couveignes and Nicolas Ros. Des obstructions globales à la descente des revêtements. *Acta Arithmetica*, 114(4) :331–348, 2004.
- [DD99] J.-C. Douai and P. Dèbes. Gerbes and covers. *Comm. in Algebra*, 27/2 :577–594, 1999.
- [Gir71] J. Giraud. *Cohomologie non-abélienne*, volume 179 of *Grundlehren Math. Wiss.* Springer, 1971.

- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1977.
- [Liu02] Qing Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford, 2002.
- [Mes91] Jean-François Mestre. Construction de courbes de genre 2 à partir de leurs modules. In Teo Mora and Carlo Traverso, editors, *Effective Methods in Algebraic Geometry*, volume 94 of *Progress in Mathematics*, pages 313–334. Birkhäuser, 1991.
- [Wew99] Stefan Wewers. Deformation of tame admissible covers of curves. In Helmut VÖLKEIN, David HARBATER, Peter MÜLLER, and J.G. THOMPSON, editors, *Aspects of Galois theory*, volume 256 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 239–282. Cambridge, 1999.